



TITLE:

Stochastic Production Planningについて(数理システムにおける最適化理論とその応用)

AUTHOR(S):

大橋, 守

CITATION:

大橋, 守. Stochastic Production Planningについて(数理システムにおける最適化理論とその応用). 数理解析研究所講究録 1995, 899: 224-232

ISSUE DATE:

1995-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84498>

RIGHT:

Stochastic Production Planning について

愛媛大学工学部 大橋 守 (Ohashi Mamoru)

1 はじめに

ある製品の需要率と在庫量に注目して、製品の適正な生産率を決める生産計画問題を考える。製品の在庫量は需要率と生産率によって決まる微分方程式に従う。Fleming, Sethi and Soner[2] は製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する Production Planning について研究した。また、Akella and Kumar [1] は生産システムの故障や修理を考慮して、生産率に制約がある Production Planning 問題を取り扱った。

ここでは、製品の需要率がマルコフ連鎖に従ってランダムに変化する Stochastic Production Planning 問題に対するダイナミック・プログラミング方程式について考察し、classical solution の数値解を求める。製品の在庫量が次の確率微分方程式で表せるものとする。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= u(t) - y(t), \\ x(0) &= x, \quad y(0) = i\end{aligned}\tag{1}$$

ただし、製品の在庫量を $x(t) \in R$, 製品の生産率 $u(t) \in K = [0, d]$, マルコフ連鎖 $\{y(t), t \geq 0\}$ とする。このマルコフ連鎖によって製品の需要率を表す。このとき

$$J(u : x, i) = \mathbf{E} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} \{h(x(t)) + g(u(t))\} dt \mid x(0) = x, y(0) = i \right]$$

を最小にする生産率 $u(t)$ を決める。ここで、 $h(x)$, $g(x)$ は単位時間当たりの在庫費用、生産費用とする。

マルコフ連鎖の状態空間 $S = \{1, 2, \dots, s\}$ は有限で生成行列 Λ を

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1s} \\ \lambda_{21} & -\lambda_{22} & \dots & \lambda_{2s} \\ \dots & & & \\ \lambda_{s1} & \lambda_{s2} & \dots & -\lambda_{ss} \end{pmatrix}, \tag{2}$$
$$\lambda_{ii} = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ij} \geq 0$$

とする。 $J(u : x, i)$ の最小値

$$v(x, i) = \inf_u J(u : x, i) \quad (3)$$

を最適費用関数といい、

$$v(x, i) = J(u^* : x, i)$$

となる u^* を最適生産方策という。

ここでは以下の仮定のもとで Stochastic Production Planning 問題を考察する。

仮定 (i) 在庫費用 $h(x)$ は R の凸関数で、正の定数 k_1, k_2 に対して

$$-k_1 \leq h(x) \leq k_2(1 + |x|^2)$$

とする。

(ii) 生産費用 $g(u)$ は K の狭義凸関数とする。

(iii) $s < d$ とする。

2 最適方策

最適費用関数 $v(x, i)$ の性質を次に示す。

補題 1 $v(x, i)$ はそれぞれの $i \in S$ に対して凸関数で

$$-k \leq v(x, i) \leq k(1 + |x|^2) \quad (4)$$

となる正の定数 k が存在する。

この補題は大橋 [5] の結果である。また、Stochastic Production Planning 問題に対するダイナミック・プログラミング方程式は

$$\alpha v(x, i) + H(x, i, v'(x, i)) - Lv(x, i) = 0, \quad x \in R, \quad i \in S \quad (5)$$

となる。ただし、

$$H(x, i, r) = - \inf_{u \in K} [h(x) + g(u) + (u - i)r], \quad (6)$$

$$Lv(x, i) = \sum_{j \neq i} \lambda_{ij} [v(x, j) - v(x, i)] \quad (7)$$

とする。

ダイナミック・プログラミング方程式 (5) の連続な解 $v(x, i)$ について次の定義を行う。

定義 (viscosity solution)

$v(x, i)$ を連続関数とする。それぞれの (x, i) に対して凸集合 $D_x^+(x, i), D_x^-(x, i)$ を次のように定義する。

$$D_x^+(x, i) = \{r \in R^n : \limsup_{h \rightarrow 0} (v(x+h, i) - v(x, i) - r \cdot h) |h|^{-1} \leq 0\},$$

$$D_x^-(x, i) = \{r \in R^n : \liminf_{h \rightarrow 0} (v(x+h, i) - v(x, i) - r \cdot h) |h|^{-1} \geq 0\}$$

このとき、連続関数 $v(x, i)$ がそれぞれの (x, i) に対して

$$\alpha v(x, i) + H(x, i, r) - Lv(x, i) \leq 0, \quad r \in D_x^+(x, i)$$

$$\alpha v(x, i) + H(x, i, r) - Lv(x, i) \geq 0, \quad r \in D_x^-(x, i)$$

となるとき、ダイナミック・プログラミング方程式 (5) の viscosity solution という。

以下の補題は Fleming, Sethi and Soner[2] の結果である。

補題 2 $v(x, i)$ が viscosity solution で凸関数ならば、それぞれの $i \in S$ に対して $v'(x, i)$ は存在し、連続となる。

補題 3 $v(x, i)$ は viscosity solution となる。

定理 1 それぞれの $i \in S$ に対して

$$u^*(x, i) = \arg \min_{u \in K} [g(u) + u \cdot v'(x, i)] \quad (8)$$

は連続となる。

[証明] 補題 1、2、3 より $v'(x, i)$ は x に関して連続となる。仮定 (ii) より

$$g(u) + u \cdot v'(x, i)$$

の最小点 $u^*(x, i)$ はただ 1 つ存在し、 x に関して連続となる。 \parallel

補題 4 u^* に対する方程式 (1) の解 $x^*(t)$ が

$$|x^*(t)| \leq k, \quad (t \geq 0)$$

となる正の定数 k が存在する。

定理 2 $v(x, i) = J(u^* : x, i)$ となる最適生産方策 u^* は (8) 式で与えられる。

[証明] 補題 4 と定理 1 より結果を得る。 \parallel

3 数値例

次に最適費用関数 $v(x, i)$ と最適生産方策 u^* の数値解を求める。いま、

$$h(x) = x^2, \quad g(u) = u^2, \quad K = [0, 3], \quad S = \{1, 2\},$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。このとき、最適生産方策 u^* は (8) 式より

$$u^*(x, i) = \begin{cases} 0 & v'(x, i) \geq 0 \\ -\frac{1}{2}v'(x, i) & -6 \leq v'(x, i) < 0 \\ 3 & v'(x, i) < -6 \end{cases} \quad (9)$$

となる。製品の最適在庫量 $x^*(t)$ は

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = u^*(x^*(t), y(t)) - y(t), \quad (10)$$

$$x^*(0) = x, \quad y(0) = i$$

で与えられる。また、 $u^*(x, i) - i = 0$ となる x を \hat{x}_i とすると、 $\{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$ がマルコフ過程であるから

$$v(\hat{x}_i, i) = \sum_{j \neq i} \int_0^\infty \lambda_{ij} e^{-(\sum_{k \neq i} \lambda_{ik})t} \left[\int_0^t e^{-\alpha s} \{f(\hat{x}_i) + g(u^*(\hat{x}_i, i))\} ds + e^{-\alpha t} v(\hat{x}_i, j) \right] dt$$

となる。よって、最適費用関数 $v(x, i)$ は \hat{x}_i で次の関係が成り立つ。

$$v(\hat{x}_1, 1) - \frac{\hat{x}_1^2 + 1}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} v(\hat{x}_1, 2) = 0 \quad (11)$$

$$v(\hat{x}_2, 2) - \frac{\hat{x}_2^2 + 4}{\alpha + 1} - \frac{1}{\alpha + 1} v(\hat{x}_2, 1) = 0 \quad (12)$$

このとき、(5) 式は次のように書ける。

(a) $-6 \leq v'(x, 1) < 0, -6 \leq v'(x, 2) < 0$ のとき

$$\alpha v(x, 1) + \frac{1}{4}(v'(x, 1))^2 + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) + \frac{1}{4}(v'(x, 2))^2 + 2v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 = 0$$

(b) $v'(x, 1) \geq 0$, $-6 \leq v'(x, 2) < 0$ のとき

$$\alpha v(x, 1) + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) + \frac{1}{4}(v'(x, 2))^2 + 2v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 = 0$$

(c) $v'(x, 1) \geq 0$, $v'(x, 2) \geq 0$ のとき

$$\alpha v(x, 1) + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) + 2v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 = 0$$

(d) $-6 \leq v'(x, 1) < 0$, $v'(x, 2) \leq -6$ のとき

$$\alpha v(x, 1) + \frac{1}{4}(v'(x, 1))^2 + v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) - v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 - 9 = 0$$

(e) $v'(x, 1) \leq -6$, $v'(x, 2) \leq -6$ のとき

$$\alpha v(x, 1) - 2v'(x, 1) - v(x, 2) + v(x, 1) - x^2 - 9 = 0$$

$$\alpha v(x, 2) - v'(x, 2) - v(x, 1) + v(x, 2) - x^2 - 9 = 0$$

$\alpha = 0.05$ の場合について上式の数値解を求める。(11), (12) 式を満たす (a) の解は

(a-i) $-1.45 \leq x < 1.30$ のとき

$$v(x, 1) = 46.890 - 2.531x + 0.975x^2$$

$$v(x, 2) = 48.305 - 3.176x + 0.975x^2$$

(a-ii) $-1.05 < x \leq 0.90$ のとき

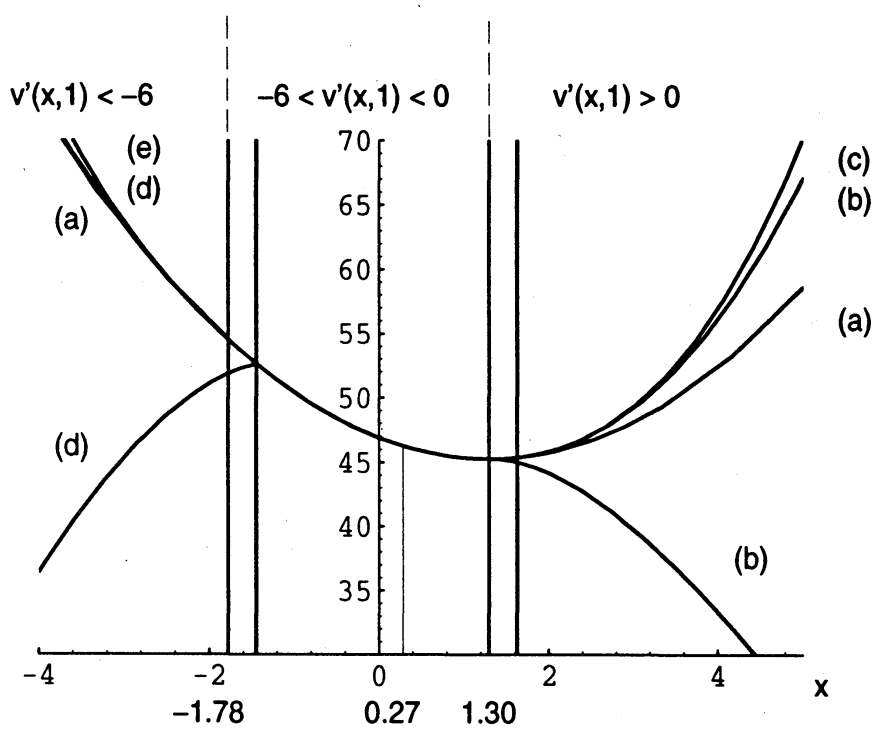
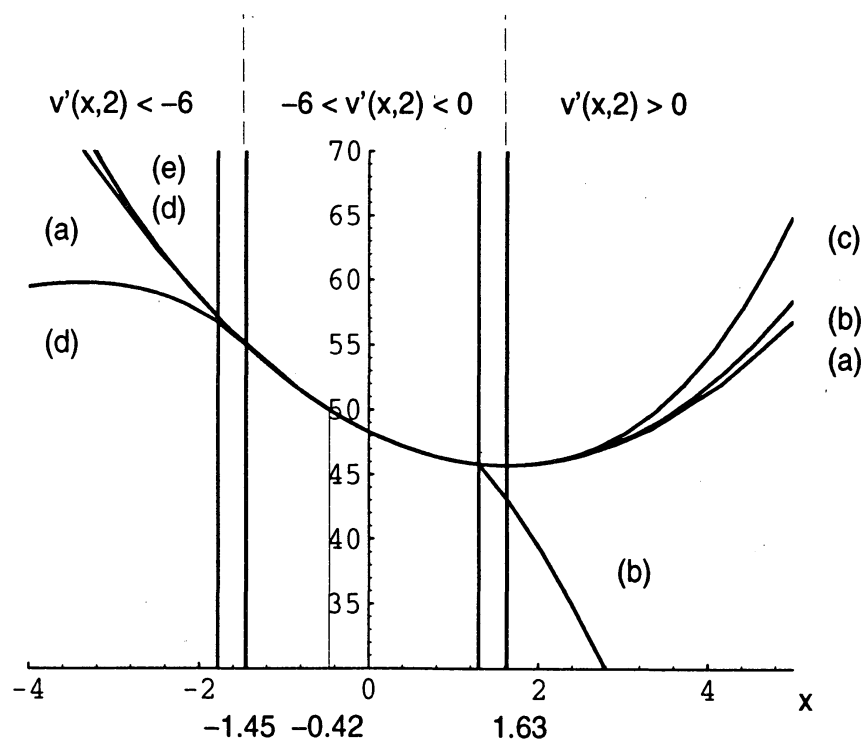
$$v(x, 1) = 29.058 - 4.200x - 1.000x^2$$

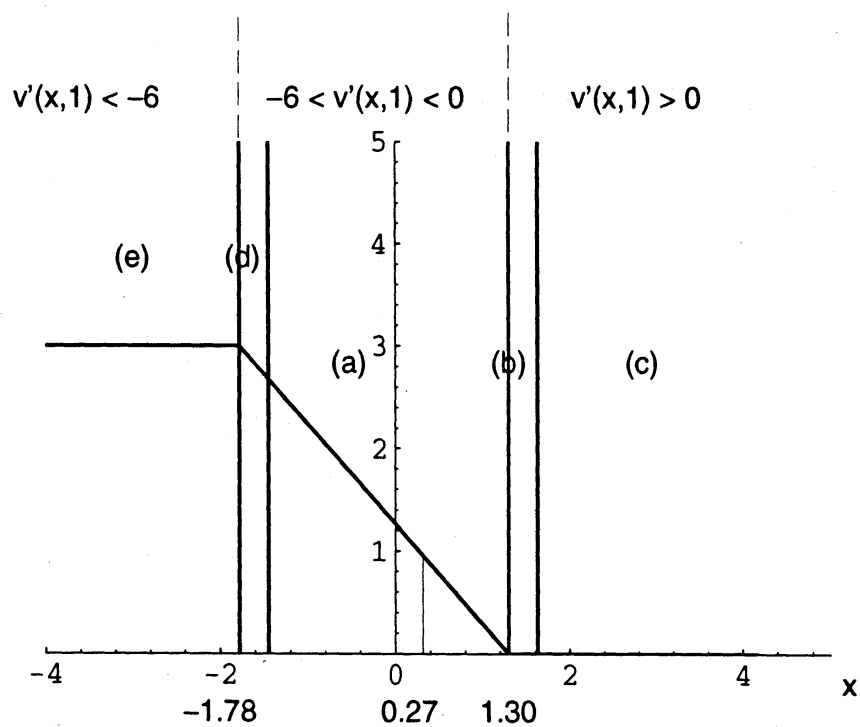
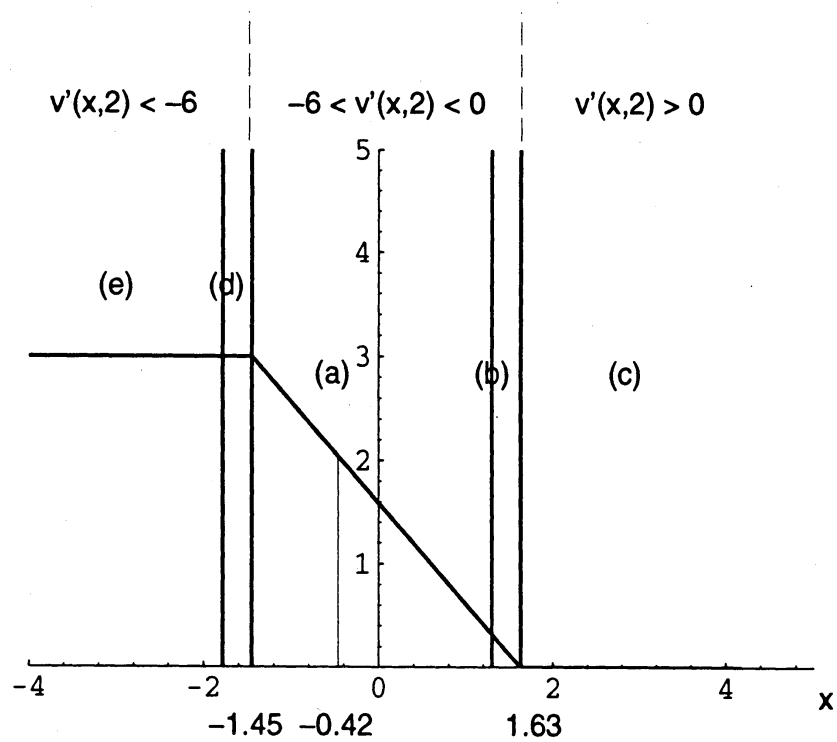
$$v(x, 2) = 30.721 - 2.210x - 1.050x^2$$

(a-iii) $-1.05 < x \leq 0.90$ のとき

$$v(x, 1) = 29.063 - 4.154x - 1.025x^2$$

$$v(x, 2) = 30.676 - 2.153x - 1.025x^2$$

Fig. 1 最適費用関数 $v(x, 1)$ Fig. 2 最適費用関数 $v(x, 2)$

Fig. 3 最適生産方策 $u^*(x,1)$ Fig. 4 最適生産方策 $u^*(x,2)$

(a-iv) $-1.05 < x \leq 0.90$ のとき

$$v(x, 1) = 29.116 - 4.105x - 1.050x^2$$

$$v(x, 2) = 30.679 - 2.100x - 1.000x^2$$

となり、 $v(x, i)$ は4つ存在する。しかし、補題1より $v(x, i)$ は凸関数であるから (a-i) の解が最適費用関数となり Fig.1,2 (a) のようになる。このとき、最適生産方策 $u^*(x, i)$ と \hat{x}_i は

$$u^*(x, 1) = 1.266 - 0.975x$$

$$u^*(x, 2) = 1.588 - 0.975x$$

$$\hat{x}_1 = 0.27$$

$$\hat{x}_2 = -0.42$$

となる。また、 \hat{x}_i の定義より製品の最適在庫量 $x^*(t)$ は

$$\frac{d}{dt}x^*(t) \begin{cases} \geq 0, & x \leq \hat{x}_{y(t)} \\ < 0, & x > \hat{x}_{y(t)} \end{cases}$$

となる。

(a-i) より $v(1.30, 1) = 45.25$, $v(1.30, 2) = 45.83$ であるから $x \geq 1.30$ のとき、(b) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (b) のようになる。このとき、 $v(x, i)$ が凸関数であるから (b) の条件 $v'(x, 1) \geq 0$, $-6 \leq v'(x, 2) < 0$ を満たす x は $1.30 \leq x < 1.63$ となる。よって、 $x \geq 1.63$ のとき、初期条件 $v(1.63, 1) = 45.36$, $v(1.63, 2) = 45.72$ のもとで (c) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (c) のようになる。同様に、 $x < -1.45$ のとき、初期条件 $v(-1.45, 1) = 52.60$, $v(-1.45, 2) = 54.95$ のもとで (d) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (d) のようになる。(d) の条件 $-6 \leq v'(x, 1) < 0$, $v'(x, 2) \leq -6$ を満たす x は $-1.78 \leq x < -1.45$ となる。よって、 $x < -1.78$ のとき、初期条件 $v(-1.78, 1) = 54.48$, $v(-1.78, 2) = 57.05$ のもとで (e) の微分方程式を解くと Fig.1,2 (e) のようになる。このとき、最適生産方式は Fig.3, 4 のようになる。また、(c), (e) の微分方程式より

$$-k_1 \leq v(x, i) \leq k_2(1 + |x|^2)$$

となる。従って、ダイナミック・プログラミング方程式 (5) を満たし、最適費用関数である classical solution が求まった。

参考文献

- [1] R. Akella and P. R. Kumar, *Optimal control of production rate in a failure prone manufacturing system*, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-31**(1986), pp.116-126.

- [2] W. H. Fleming, S. P. Sethi and H. M. Soner, *An optimal stochastic production planning problem with randomly fluctuating demand*, SIAM J. Control and Optim., **25**(1987), pp.1494-1502.
- [3] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer-Verlag, 1993.
- [4] M. K. Ghosh, A. Arapostathis and S. I. Marcus, *Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems*, SIAM J. Control and Optim., **31**(1993), pp.1183-1204.
- [5] 大橋 守, *Simple Production Planning Model* について, 数理解析研究所講究録, **864**(1994), pp. 31-40.